# Istituzioni di Matematiche
## CdL Scienze Biologiche

Richiamo

Teorema (2° sost.)

Sia $f : (c,d) \to (a,b)$ derivabile + invertibile

$g : (a,b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive

$$\Longrightarrow \boxed{\int g(x)\,dx = \left[\int g(f(t)) \cdot f'(t)\,dt\right]_{t = f^{-1}(x)}}$$

<u>Applicazione 1</u> $\int R(e^x)\,dx$

Usare $f(t) = \lg t \iff t = e^x$

<u>Applicazione 2</u>

$$\int R(\operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x)\,dx$$

<u>Ricorda</u>: $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + tg^2 x}$ , $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}$

(Dette formule parametriche)

$$\int R(\ \ ^2\ ,\ \ ^2\ )\ , \quad \int R\left(tg^2 x\ ,\ \frac{1}{\ }\right)dx$$

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\, dx = \int R\left(\frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}, \frac{1}{1+tg^2 x}\right) dx$$

Usiamo il 2° teorema di sostituzione, con

$$f(t) = \operatorname{arctg} t \iff t = f^{-1}(x) = tg\, x$$

Da cui

$$\int R\left(\frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}, \frac{1}{1+tg^2 x}\right) dx \overset{2^\circ \text{ sost}}{=\!=}$$

$$= \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

ottenendo un integrale fratto!

Esempio

$$\int \frac{\cos^2 x}{1 - 2\sin^2 x}\, dx =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{1+tg^2 x}}{1 - 2\frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}}\, dx =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cancel{1+tg^2 x}}}{\frac{1+tg^2 x - 2tg^2 x}{1+tg^2 x}}\, dx = \int \frac{1}{1 - tg^2 x}\, dx$$

$$\cup \quad \frac{1+tg^2x-2tg^2x}{1+tg^2x} \qquad \cup \quad 1-tg^2x$$

Uso 2° sost con $f(t)=\operatorname{arctg} t \iff t = tg x$

2° sost $\displaystyle\int \frac{1}{1-t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt$ = (integrale fratto)

Passo 2 Decompongo denominatore

$\Delta < 0$

$$(1-t^2)(1+t^2) = (1-t)(1+t)(1+t^2)$$

Passo 3 Ricerca costanti

$$\boxed{\frac{1}{(1-t^2)(1+t^2)} = \frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{Ct+D}{1+t^2}}$$

$(1-t)(1+t)$

$$= \frac{A(1+t)(1+t^2)+B(1-t)(1+t^2)+(Ct+D)(1-t^2)}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}$$

$$= \frac{At^3+At^2+At+A-Bt^3+Bt^2-Bt+B-Ct^3-Dt^2+Ct+D}{(1-t^2)(1+t^2)}$$

$$= \frac{(A-B-C)t^3+(A+B-D)t^2+(A-B+C)t+(A+B+D)}{(1-t^2)(1+t^2)}$$

Da cui

$$1 = (A-B-C)t^3 + (A+B-D)t^2 + (A-B+C)t + (A+B+D)$$

$$\begin{cases} A-B-C=0 & \rightarrow \quad C = A-B = 0 \\ A+B-D=0 & \rightarrow \quad D = A+B = 2A \\ A-B+C=0 & \rightarrow 3^a \quad A-B+A-B=0 \iff A=B \\ A+B+D=1 & \rightarrow 4^a \quad A+A+2A=1 \end{cases}$$

$$\boxed{A=\frac{1}{4}, \quad B=\frac{1}{4}, \quad C=0, \quad D=\frac{1}{2}}$$

Passo 4 Sostituisco tali numeri all'espressione del Passo 3

$$\int \frac{1}{(1-t^2)(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1-t}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{4}\log|1-t| + \frac{1}{4}\log|1+t| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \underline{\underline{cost}}$$

$t = tg x$

$$= -\frac{1}{4}\log|1-tg x| + \frac{1}{4}\log|1+tg x| + \frac{1}{2}x + \underline{\underline{cost}}$$

## Applicazione 3

$p \in \mathbb{N} \quad p \geq 2$

$$\int R\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

Per poter usare il 2° teorema di sostituzione,

si prova che

$$h(x) = \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

essa è sempre funzione invertibile!

Allora scegliere $\boxed{f(t) = h^{-1}(t)}$ e usare 2° sost.

e ci si riconduce ad un integrale fratto.

Esempio $\displaystyle\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}\, dx$

$$g(x) = \sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}} \qquad \text{considero } f(t) = g^{-1}(t)$$

così che $t = f^{-1}(x) = g(x)$

$$= \sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}$$

Ossia dall'eqne

—

$$t = \sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}$$ voglio trovare $x$ in funzione di $t$

$$t^2 = \frac{3x-2}{3x+1}$$

$$3t^2x + t^2 = 3x-2$$

$$3t^2x - 3x = -t^2-2$$

$$3(t^2-1)\,x = -t^2-2$$

$$x = -\frac{t^2+2}{3(t^2-1)} = F(t)$$

$$F'(t) = -\frac{1}{3}\,\frac{2t\,(t^2-1)-(t^2+2)\,2t}{(t^2-1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{2t\,[\cancel{t^2}-1-\cancel{t^2}-2]}{(t^2-1)^2} =$$

$$= -\cancel{\frac{1}{3}}\,\frac{2t\,\cancel{(-3)}}{(t^2-1)^2} = \frac{2t}{(t^2-1)^2}$$

Posso usare 2° sost

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}\,dx = \int \frac{1}{\underbrace{-\frac{1}{3}\,\frac{t^2+2}{\cancel{t^2-1}}}_{x}} \cdot t \cdot \frac{2t}{\underbrace{(t^2-1)^{\cancel{2}}}_{f'(t)}}\,dt =$$

$$= -6 \int \frac{t^2}{(t^2-1)\,(t^2+2)}\,dt$$

$$t = \sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}$$

Passo 2 Decomp. denom.

$\Delta < 0$

$$(t^2-1)\,(t^2+2) = (t-1)\,(t+1)\,(t^2+2)$$

Passo 3 Ricerca costanti

$$\boxed{\frac{t^2}{(t^2-1)\,(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+2}}$$

$$= \frac{A(t+1)(t^2+2) + B(t-1)(t^2+2) + (Ct+D)\cdot(t^2-1)}{(t-1)\,(t+1)\,(t^2+2)}$$

$$= \frac{At^3 + At^2 + 2At + 2A + Bt^3 - Bt^2 + 2Bt - 2B + Ct^3 + Dt^2 - Ct - D}{(t^2-1)\,(t^2+2)}$$

$$= \frac{(A+B+C)t^3 + (A-B+D)t^2 + (2A+2B-C)t + (2A-2B-D)}{(t^2-1)\ (t^2+2)}$$

Da cui

$$t^2 = (A+B+C)t^3 + (A-B+D)t^2 + (2A+2B-C)t + (2A-2B-D)$$

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ A-B+D = 1 \rightarrow B = A+D-1 \\ 2A+2B-C = 0 \rightarrow C = 2A+2(A+D-1) = 4A+2D-2 \\ 2A-2B-D = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow 2A - 2(A+D-1) - D = 0$$

$$\cancel{2A} - \cancel{2A} - 2D + 2 - D = 0$$

$$-3D = -2 \qquad D = \frac{2}{3}$$

$$B = A + \frac{2}{3} - 1 = A - \frac{1}{3}$$

$$C = 4A + 2 \cdot \frac{2}{3} - 2 =$$

$$= 4A + \frac{4}{3} - 2 = 4A - \frac{2}{3}$$

Sost 1ª

$$A + \underbrace{\left(A - \frac{1}{3}\right)}_{B} + \underbrace{\left(4A - \frac{2}{3}\right)}_{C} = 0$$

$$6A - 1 = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$B = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$C = \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{6}_{3}} - \frac{2}{3} = 0$$

$$D = \frac{2}{3}$$

Passo 4 Sostituisco i numeri sopra ricavati all'espress

Passo 3

$$-6\int \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+2)}\,dt = -6\left[\frac{1}{6}\int\frac{1}{t-1}\,dt - \frac{1}{6}\int\frac{1}{t+1} + \frac{2}{3}\int\frac{1}{t^2+2}\,dt\right]$$

$$= -\lg|t-1| + \lg|t+1| + \frac{2}{3}\int\frac{1}{t^2+2}\,dt =$$

$$= \underbrace{-\lg|t-1| + \lg|t+1|}_{\#1} + \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\int\frac{1}{\frac{t^2}{2}+1}\,dt =$$

$$= \#1 + \frac{1}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dt$$

$$z = \frac{t}{\sqrt{2}} \Rightarrow dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\,dt \qquad \underline{\underline{1^\circ}}\text{ sost}$$

$$= -\lg|t-1| + \lg|t+1| + \frac{1}{3}\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \qquad \underline{1^\circ}\text{ sost}$$

$$= -\lg|t-1| + \lg|t+1| + \frac{\sqrt{2}}{3}\int\frac{dz}{z^2+1}\Bigg]_{z=\frac{t}{\sqrt{2}}}$$

$$= -\lg|t-1| + \lg|t+1| + \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \underline{\underline{\text{cost}}}$$

$$= -\lg\left|\sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}-1\right| + \lg\left|\sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}+1\right| + \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}\right.$$

$$= -\log\left|\sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}} - 1\right| + \log\left|\sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}} + 1\right| + \frac{\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}\right)$$

$$+ \text{cost}$$

Esercizio (12 Maggio 2026)

$$\int \underbrace{x^3}_{f(x)} \; \underbrace{e^{-x^2}}_{g'(x)} \, dx = \int x \cdot \left(x^2 \cdot e^{-x^2}\right) dx = (*)$$

1° sost $\quad z = x^2 \Rightarrow dz = 2x\,dx$

$$(*) = \frac{1}{2} \int \left(x^2 \cdot e^{-x^2}\right) \cdot 2\cancel{x}\,dx \overset{1°\,\text{sost}}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{z}_{f(z)} \cdot \underbrace{e^{-z}}_{g'(z)} \cdot dz \Big]_{z=x^2} = (\text{parti})$$

$$g(z) = -e^{-z}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(z \cdot (-e^{-z})\right) - \int \underbrace{1}_{f'(z)} \left(-e^{-z}\right) dz\right] =$$

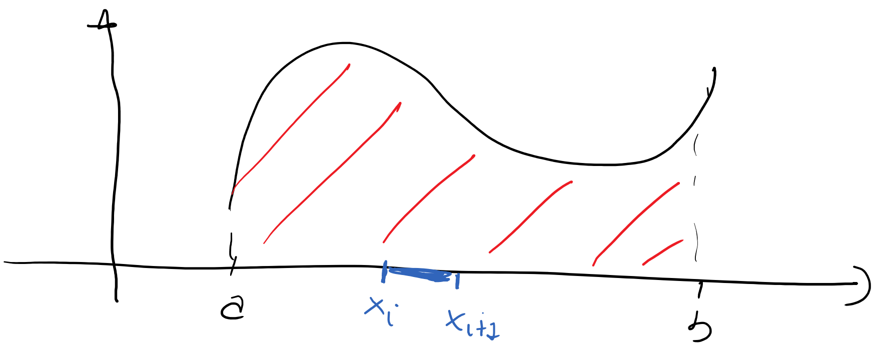
$$= -\frac{1}{2} z e^{-z} + \int e^{-z}\,dz = -\frac{1}{2} z e^{-z} - e^{-z} + \text{cost}$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + \underline{\underline{cost}}$$

# Integrale di Riemann

Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

vogliamo calcolare (se possibile) l'area sottesa al grafico della funzione



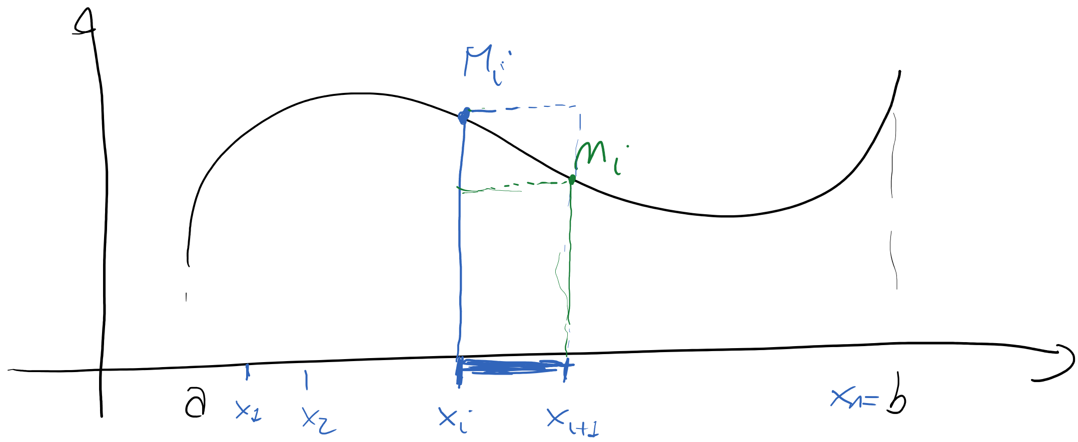

Sia $\quad D = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$

D viene detto "decomposizione di $[a,b]$

Poiché $f(x)$ è limitata allora posso considerare i 2 numeri:

$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$
$$M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$




Considero i rettangoli di base $[x_i, x_{i+1}]$

ed altezza $\left\langle \begin{array}{l} M_i \ \text{(blu)} \\ m_i \ \text{(verde)} \end{array} \right.$

l'area di questi rettangoli sono

$(x_{i+1} - x_i) M_i$ $\qquad$ $(x_{i+1} - x_i) m_i$

$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$ considero la somma delle aree di tutti questi rettangoli

Trovo:

"somma superiore relativa di $D$"

$$S_D^f := \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$$

"somma inferiore relativa a $D$"

$$s_D^f \qquad \sum^{n-1}$$

$$s_D^f := \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$$

Osserviamo anzitutto che $\forall D$ decomposizione di $[a,b]$

$$\Rightarrow \quad s_D^f \leq S_D^f$$

Infatti

$$s_D^f = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) \, (x_{i+1} - x_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) \, (x_{i+1} - x_i) = S_D^f$$

<u>Lemma</u> (Riemann)

$\forall D_1, D_2$ due decomposizioni di $[a,b]$

Allora $\quad s_{D_1}^f \leq S_{D_2}^f$

Se Definiamo

$$\Sigma = \left\{ S_D^f : D \text{ decomp. di } [a,b] \right\}$$

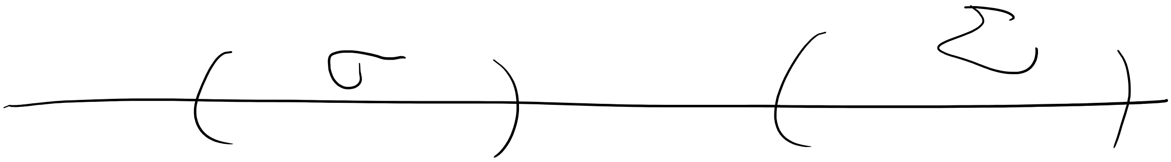
$$\sigma = \left\{ s_D^f : D \text{ decomp. di } [a,b] \right\}$$

$$\sigma = \left\{ s_D^f : D \text{ decomp. di } [a,b] \right\}$$

ossia sto considerando due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

Dal lemma di Riemann so che

$$\sigma \leq \Sigma$$



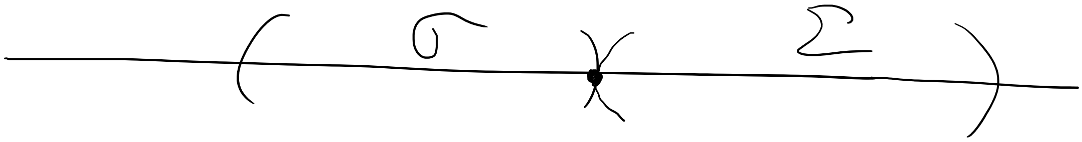

Da cui $\boxed{\sup \sigma \leq \inf \Sigma}$

<u>Notazione</u>: chiamiamo $\sigma$ come insieme delle somme inferiori e $\Sigma$ come l'insieme delle somme superiori

<u>Def</u> Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata si dice Riemann integrabile se

$$\boxed{\sup \sigma = \inf \Sigma}$$

Ossia $\sigma$ e $\Sigma$ sono due insiemi contigui.

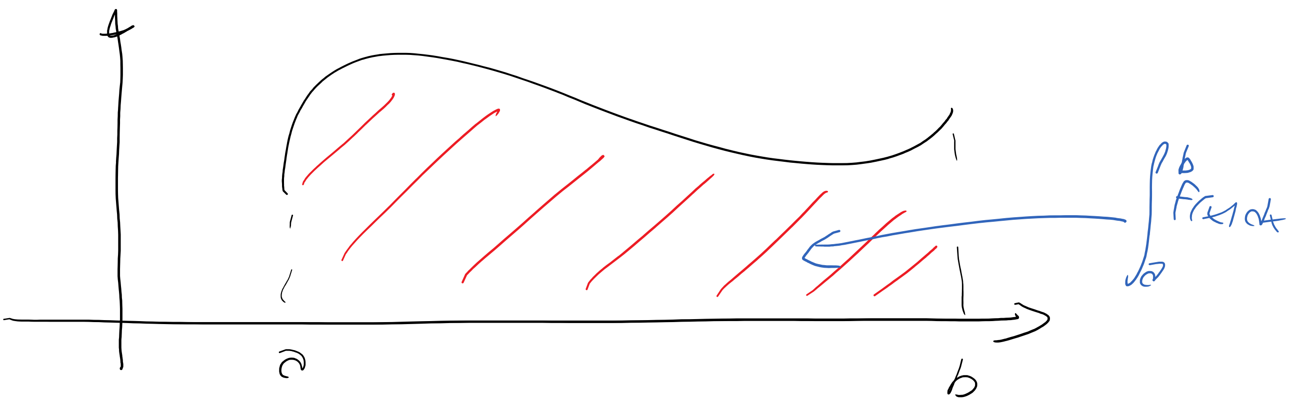



e l'elemento di contiguità viene detto integrale di Riemann di f(x) su [a,b]

Denotato

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \overset{def}{=} \sup \sigma = \inf \Sigma} \in \mathbb{R}$$

In realtà questo numero coincide con l'area sottesa al grafico della funzione su [a,b]




Esercizio Studiare la successione

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \end{cases}$$

$f(x) = \sqrt{6+x}$ CE $6+x \geq 0 \iff x \geq -6$

Nota che $a_1 = 1 \geq 0 > -6$ ok

$a_2 = \sqrt{6+a_1} \geq 0$ $a_3 = \sqrt{6+a_2} \geq 0$

In generale $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

In particolare $\boxed{a_n \geq -6 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

Quindi, la successione ha senso.

$f(x) = \sqrt{6+x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{6+x}} > 0$

sempre $\forall x \geq 0$

$\Rightarrow f(x)$ cresce in $[0, +\infty[$

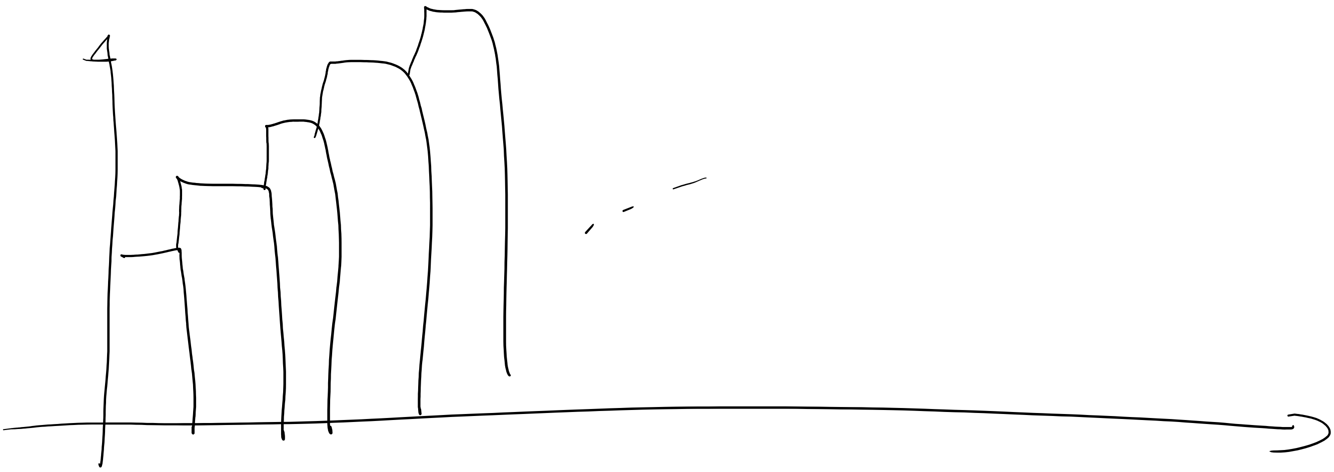
$a_1 = 1$ $a_2 = \sqrt{6+1} = \sqrt{7}$

$a_1 < a_2 \Rightarrow a_2 = f(a_1) < f(a_2) = a_3$

ossia $a_2 < a_3$

applicando di volta in volta $f(x)$

$\Rightarrow \quad a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$



$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \begin{cases} \nearrow +\infty \\ \searrow l \end{cases}$

con $l > 0$ (ricorda permanenza del segno $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$)

caso 1

Se $\quad l = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$

$$l = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \overset{(f\ \text{cont.})}{=} f(l)$$

$$\Rightarrow \quad l = f(l) = \sqrt{6+l}$$

$$l = \sqrt{6+l}$$

$$l^2 = 6 + l$$

$$l^2 - l - 6 = 0 \qquad \Delta = 1 + 24 = 5^2$$

$$l = \begin{cases} \frac{1-5}{2} = \cancel{-2} \\ \frac{1+5}{2} = 3 \end{cases}$$

In particolare deve essere $a_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Usando il principio di induzione

$a_1 = 1 < 3$ (OK) base induzione

Suppongo che $a_n \leq 3$ e provo che $a_{n+1} \leq 3$

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \leq \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$$

$\Longrightarrow \quad a_{n+1} \leq 3$ (OK)

Concludo: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è successione monotona crescente limitata superiormente con

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 3$$